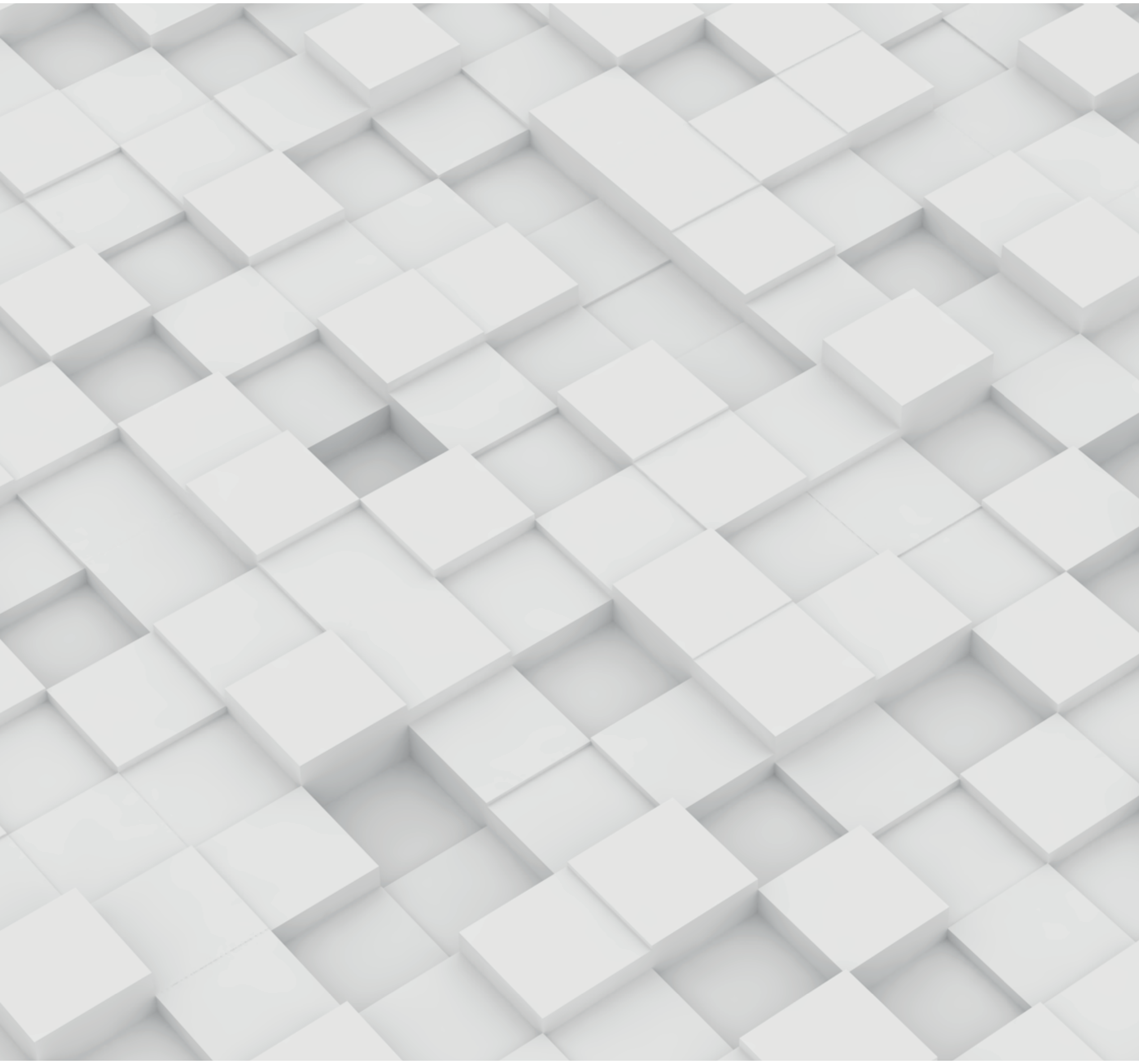
antares



Whitepaper

[Expertenschätzungen in der Risikoanalyse

[1. Eingrenzung des Themas

Unter Risikoanalyse verstehen wir die stochastische Quantifizierung bereits identifizierter Risiken durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen (W-Verteilungen) sowie die Aggregation quantifizierter Einzelrisiken zu einem Gesamtrisiko mittels Monte-Carlo-Simulation (MCS).

Anders als für viele Finanzmarkt- und Versicherungsrisiken stehen insbesondere für operationale Risiken meist zu wenig oder keinerlei relevante historische Daten zur Verfügung, um W-Verteilungen mit einem hinreichenden Signifikanzniveau anzupassen. Ein Ignorieren solcher Risiken mit dem Verweis auf ihre Nicht-Quantifizierbarkeit führt unweigerlich zu einer systematischen und unter Umständen dramatischen Unterschätzung des Gesamtrisikos und verbietet sich damit von selbst.

Deshalb werden in solchen Fällen Expertenschätzungen benötigt. Expertenschätzungen können im Verbund mit historischen Daten zur Bildung einer Bayes-Risikofunktion[1] verwendet werden. Ein solches Verfahren ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es zwar gewisse relevante historische Daten gibt, diese aber nicht ausreichen, eine Verteilung mit hinreichender Güte anzupassen. Zudem lassen sich häufig Marktschäden als Quantifizierungsbasis nutzen. Diese Marktschäden müssen allerdings so skaliert werden, dass sie den spezifischen Verhältnissen des jeweiligen Unternehmens gerecht werden. Für diese Skalierung sind wiederum häufig Expertenschätzungen notwendig.

Expertenschätzungen unterliegen unweigerlich den üblichen Verzerrungen wie sie etwa durch den Ankereffekt oder dem Rückschaufehler verursacht werden[2]. Diesen Verzerrungen kann zum Bespiel mit der Delphi-Methode teilweise erfolgreich begegnet werden. Ziel der Delphi-Methode ist es, während mehrerer Experten-Befragungsrunden eine Konvergenz der Einzelprognosen zu erreichen, ohne dass sich die Experten in gemeinsamen Diskussionen gegenseitig beeinflussen.

Um das Thema einzugrenzen, betrachten wir hier keine Einbeziehung von Marktschäden und keine Bildung von Bayes-Risikofunktionen. Ebenso bleiben auch weitere Methoden zur Überlagerung differierender Expertenmeinungen unberücksichtigt.

Wir wollen uns dagegen auf folgende Analyseschritte beschränken:

- Wahl des Verteilungstyps für ein Einzelrisiko
- Parametrisierung der Verteilung eines Einzelrisikos
- Modellierung der Abhängigkeiten bei der Risikoaggregation

[1] Vgl. Dish (2019)
[2] Ankereffekt (engl. anchoring effect) ist ein Begriff aus der Kognitionspsychologie für die Tatsache, dass Menschen bei bewusst gewählten Zahlenwerten von momentan vorhandenen Umgebungsinformationen beeinflusst werden, ohne dass ihnen dieser Einfluss bewusst wird.
Rückschaufehler (englisch hindsight bias) bezeichnet in der Kognitionspsychologie die kognitive Verzerrung, dazu zu neigen, nachdem ein Ereignis eingetreten ist, die Vorhersehbarkeit dieses Ereignisses zu überschätzen - siehe Daniel Kahneman „Schnelles Denken, langsames Denken"

Expertenschätzungen weisen vor allem folgende Schwachstellen auf:

- Der einzelne Experte ist sich meist unsicher mit der jeweiligen Einschätzung und verschiedene Experten können zu deutlich abweichenden Schätzungen gelangen.
- Selbst wenn der Experte aus jahrelanger Erfahrung ein sicheres „Gefühl" zu dem jeweiligen Risiko besitzt, fällt es ihm oft schwer, dies in eine mathematische Sprache zu übersetzen.
- Experten schätzen meist unbewusst nur auf Grund der eigenen Erfahrungswerte und verfügbaren Informationen (Verfügbarkeitsheuristik).

Zudem lassen sich diese Probleme in der Praxis selten präzise voneinander trennen.
Die für die Risikoaggregation notwendige Einschätzung der Abhängigkeiten ist dabei noch schwieriger als die Expertenschätzungen für Einzelrisiken.

Für die Praxis ist es notwendig, die sachgerechte (Teil-)Kalibrierung von Einzelrisiken und der Abhängigkeiten mittels Expertenwissens zu ermöglichen, ohne dass dabei spezielle Stochastik-Kenntnisse notwendig sind. Hierzu sollen nachfolgend einige Anregungen geben werden.

[2. Wahl eines Verteilungstyps

Zur Modellierung von Risiken steht eine große Auswahl von Verteilungstypen zur Verfügung. Es ist es sinnvoll, in der Modellierungssoftware einen speziellen Katalog von Verteilungen für Expertenschätzungen vorzuhalten. Prinzipiell lässt sich jede Verteilung, welche sich zur Risikomodellierung nutzen lässt, auch durch eine Expertenschätzung kalibrieren. Praktisch sind dem allerdings enge Grenzen gesetzt. Die Parametrisierung der Verteilung muss über die Schätzung von Werten erfolgen, welche dem Experten intuitiv zugänglich sind und die Verteilung unmittelbar nachvollziehbar beeinflussen. Die Schätzung des EW sowie der Varianz erweisen sich oft als besonders schwierig und wenig intuitiv. Der EW wird oft unbemerkt mit dem häufigsten Wert verwechselt und kann durch seltene Extremereignisse stark beeinflusst sein. Dieses Phänomen wird insbesondere bei den Schadenhöhenverteilungen deutlich. Die Varianz ist per se intuitiv schwierig zugänglich.

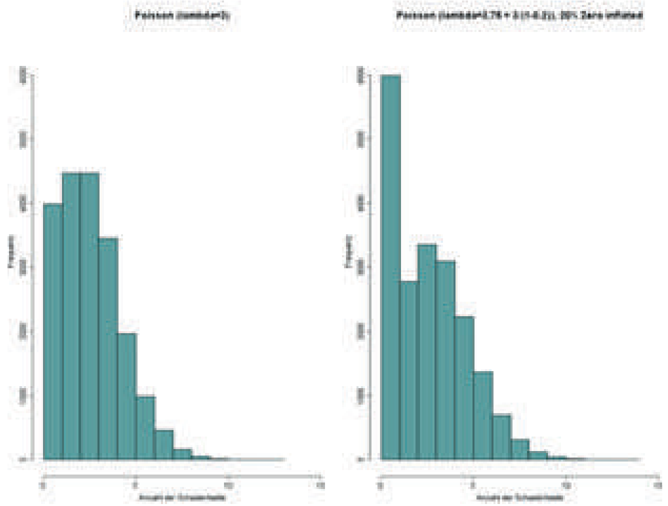
Wir betrachten hier die Verteilungen für die Schadenfrequenzen sowie für die Einzelschadenhöhen getrennt.

2.1 Frequenzverteilungen

Ideale Frequenzverteilungen im Rahmen von Expertenbefragungen sind die Poissonverteilung und die Binomialverteilung. Beide Verteilungen sind einfach zu interpretieren. Meist ist es hinreichend, sich der Poissonverteilung zu bedienen, die nur einen Parameter benötigt, für die lediglich die zu erwartende Frequenz zu schätzen ist.

Nur wenn der Experte eine deutlich kleinere oder deutlich größere Varianz als bei der Poissonverteilung – bei der die Varianz gleich dem Erwartungswert (EW) ist – vermutet, sollte die Binomialverteilung (Varianz < EW) bzw. die Negative Binomialverteilung (Varianz <> EW) genutzt werden.

Oft sieht man ein im Vergleich zu den genannten Frequenzverteilungen gehäuftes Ausbleiben von Ereignissen (Frequenz =0). In solchen Fällen kann die Verwendung sogenannter zero-inflated Verteilungen sinnvoll sein. Hier sind vom Experten der EW sowie die Wahrscheinlichkeit der Frequenz 0 abzuschätzen. Die Abbildung zeigt Histogramme einer Poissonverteilung und einer zero-inflated Poissonverteilung mit einem EW von jeweils 3.



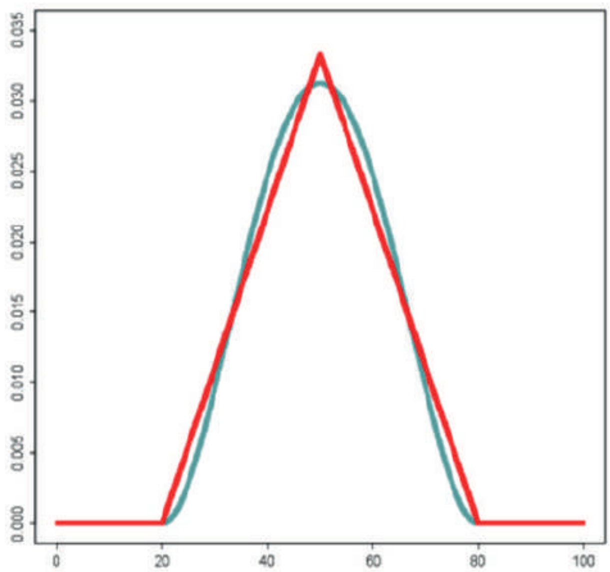
Kann sich das fragliche Risiko in dem betrachteten Zeithorizont maximal einmal realisieren, ist lediglich eine Eintrittswahrscheinlichkeit (Bernoulli-Schema) zu schätzen.

So schwierig es im Einzelfall sein mag, die Frequenzen bzw. Wahrscheinlichkeiten richtig einzuschätzen, so ist zumindest die Parametrisierung dieser Frequenzverteilungen vergleichsweise einfach zu verstehen. Das ist bei den Schadenhöhenverteilungen anders, weshalb man sich dort bei Expertenschätzungen häufig hierfür besonders ausgesuchter Verteilungen bedient.

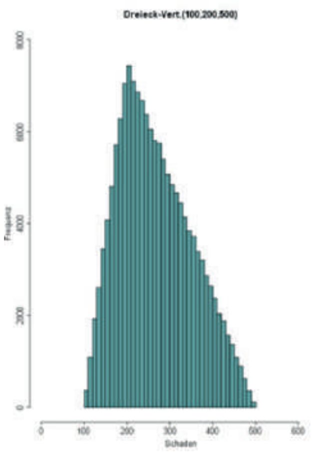
2.2 Schadenhöhenverteilung

Intuitiv besonders leicht zu greifende Verteilungen sind die Gleichverteilung sowie die Dreiecksverteilungen. Sind nur Minimum und Maximum abschätzbar und sonst keinerlei Einschätzung der W-Verteilung möglich, so kann es sinnvoll sein, die Gleichverteilung zu nutzen.

Lässt sich neben Minimum und Maximum auch der wahrscheinlichste Wert (Modus) einschätzen, so bietet sich die Dreieckverteilung an. Als Alternative zur Dreieckverteilung kann in diesen Fällen auch die Pertverteilung genutzt werden. Die Dreieckverteilung läuft beim Modalwert spitzer zu und an den Rändern flacher aus. Am Beispiel (Min=20, Modus=50, Max=80) ergibt sich ein Vergleich der Dichten dieser beiden Verteilungen wie hier abgebildet.



Die Parameter der Dreiecksverteilung und der Pertverteilung können ihrerseits als Gleichverteilung, Dreiecksverteilung oder Pertverteilung modelliert werden, um so z.B. die Unsicherheit der Parameterschätzung wiederzugeben. Die Abbildung vergleicht die Histogramme einer Dreiecksverteilung (Min =100, Mode=200, Max=500) mit einer Simulation, bei der das Maximum als Gleichverteilung zwischen 500 und 600 modelliert wurde.



Neben den genannten Verteilungen ist es aber auch bei Expertenschätzungen oft notwendig, weitere Verteilungstypen in Betracht zu ziehen. Hierzu gehören typischerweise die Gamma-, die Lognormal-, die Weibull- und Extremwertverteilungen. Der Verteilungstyp kann sich dabei im Einzelfall aus bestimmten heuristischen Prinzipien oder durch Vergleich mit ähnlich gelagerten und bereits quantifizierten Risiken ergeben. So ist z.B. eine (verschobene) Lognormalverteilung nur dann ein geeigneter Kandidat, wenn ein Minimum existiert und eine rechtsschiefe Verteilung ohne Maximum bzw. ein sehr hohes theoretisches Maximum möglich ist, welches um ein Vielfaches größer ist als das 95% Quantil.

Setzt sich ein Risiko aus vielen ähnlich großen unabhängigen Einzelrisiken zusammen, so ist die Normalverteilung ein guter Kandidat.

2.3 Verteilungen mit maximaler Entropie

Eine wichtige Methode der Verteilungswahl besteht darin, diejenige Verteilung zu wählen, welche die durch die Expertenschätzungen vorgegebenen Bedingungen erfüllt und dabei ein Minimum an Information enthält. Die Verteilung soll somit lediglich die in der Schätzung enthaltende Information enthalten und keinerlei weitere implizite Annahmen widerspiegeln. Ein Minimum an Information bzw. ein Maximum von Unsicherheit wird mathematisch durch das Entropiemaß beschrieben. Der Entropiebegriff stammt ursprünglich aus der Thermodynamik und wurde von Ludwig Boltzmann eingeführt. Seitdem fand er in verschiedenen Abwandlungen Anwendungen in der Informationstheorie, der Statistik aber auch in der reinen Mathematik.

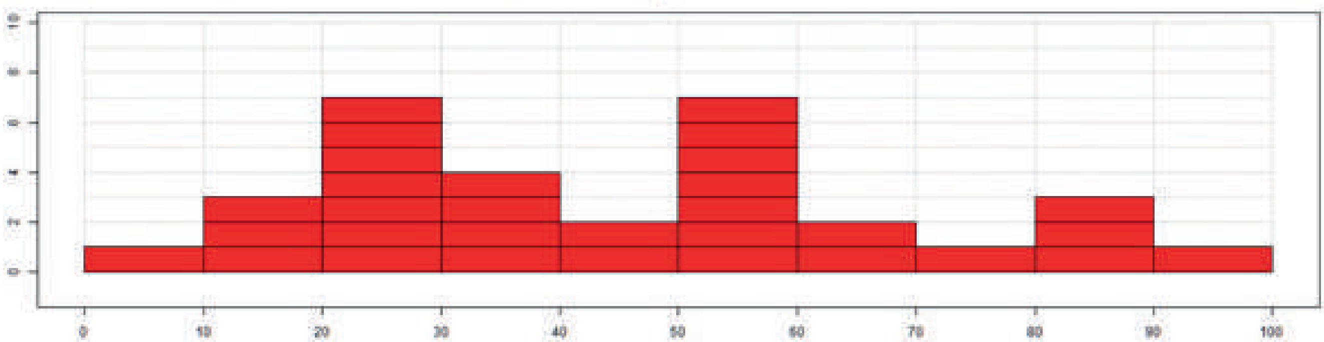
Die hier angesprochene Entropie von W-Verteilungen geht auf E.T. Jaynes zurück und wurde in 1957 eingeführt. Allerdings kann nicht für alle Klassen von Verteilungen ein Vertreter mit maximaler Entropie gefunden werden. Die nachstehende Tabelle gibt eine Auswahl verschiedener, relevanter Szenarien.

Variable(n) der Expertenschätzung	Verteilung mit maximaler Entropie
Erwartungswert	Exponentialverteilung
Minimum = 0 Quantil	Exponentialverteilung
Minimum > 0 Quantil	Verschobene Exponential- sowie Gammaverteilung
Minimum & Maximum	Gleichverteilung
Minimum, EW, Maximum	Allgemeine Betaverteilung
EW & Standardabweichung	Normalverteilung
Minimum, EW, Maximum, Standardabweichung	Allgemeine Betaverteilung
EW der Frequenz	Poissonverteilung

Diese Tabelle ist wie folgt zu verwenden: Schätzt der Experte z.B. ein Risiko mit einem Minimum, welches größer als Null ist und einen Quantilswert hat, so sind eine verschobene Exponentialverteilung und eine Gammaverteilung diejenigen Verteilungen, welche bei Erfüllung der durch die Schätzung gegebenen Bedingung ein Maximum an Entropie besitzen, also keine weitere Information enthalten. Hält man sich also an das Prinzip der maximalen Entropie, so ist eine solche Verteilung zu Modellierung zu nutzen.

Das Prinzip unter Berücksichtigung von Beschränkungen eine Verteilung mit maximaler Entropie zu wählen, lässt sich als Verallgemeinerung des von Pierre-Simon Laplace in 1812 eingeführten Indifferenzprinzips interpretieren. Das Indifferenzprinzip besagt, dass bei k=2,3,4... unterscheidbaren und sich gegenseitig ausschließenden möglichen Ereignissen die Eintrittswahrscheinlichkeit jedes Ereignisses ohne Vorliegen weiterer Informationen genau jeweils 1/k beträgt. Auch lässt sich dieses Prinzip als ein Spezialfall von Ockhams Rasiermesser[3] interpretieren.

Für den Fall, daß der Experte sich eine genauere Bestimmung der Verteilung zutraut, kann es auch angemessen sein, die Verteilung als Histogrammverteilung zu bestimmen. Dazu verteilt der Experte die Wahrscheinlichkeitsdichte auf die Klassen eines Histogramms. Hierdurch können dann auch ungewöhnliche z.B. multimodale Verteilungsformen in Anwendung kommen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel einer solchen durch den Experten maßgeschneiderten Verteilung.



[3] Ockhams Rasiermesser ist ein auf Wilhelm von Ockham (1288–1347) zurückgehendes heuristisches Prinzip der ontologischen Sparsamkeit und der Einfachheit von Theorien. Dieses Prinzip spielt in verschiedenen präzisierten Versionen eine wichtige Rolle in der modernen Wissenschaftstheorie. VGL. z.B. Goodman (1955).

[3. Parametrisierung der W-Verteilungen von Einzelrisiken

Während die typischen Schaden-Frequenzverteilungen -wie oben schon kurz beschrieben- intuitiv relativ einfach zu fassen sind und insoweit auch gut durch Experten kalibriert werden können, ist die Situation bei den Schadenhöhenverteilungen komplexer.

Die Konzepte Minimum, Modus und Maximum sind leicht zu verstehen und ihre Schätzung ist im Regelfall einfacher als beispielsweise die Schätzung des EW`es und der Standardabweichung (STABWN). Daher eignen sich die Dreieckverteilung und die Pertverteilung besonders gut zur Modellierung mittels Expertenschätzungen. Allerdings sind diese Verteilungen nicht für alle Risiken geeignet. Stattdessen braucht man zusätzliche Verteilungsfunktionen, wie z.B. eine Lognormal-, Weibull- oder eine Pareto-Verteilung.

Solche Verteilungen können mittels Expertenschätzungen am besten über ihre Quantile parametrisiert werden. Hierbei sollte über einen Liste typischer W-Verteilungen ein Quantil-Fitting ausgeführt werden. Mit einer Schätzung von zwei oder drei Quantilwerten lassen sich meist gleich mehrere W-Verteilungen mittels der Methode der (gewichteten) kleinsten Quadrate gut anpassen. Typische Quantile für solche Schätzungen sind etwa der Median (50%), 75% („4-jähriges Ereignis") und 90% („10-jähriges Ereignis").

Die Verteilung mit der besten Anpassung an die geschätzten Quantile ist dann typischerweise ein guter Kandidat zur Modellierung des betrachteten Risikos. Zumindest bei den größeren Risiken sollte der Experte sich aber die von ihm kalibrierten Verteilungen auch in Plots anschauen, um dann ggf. auf eine andere Verteilung auszuweichen.

Für sehr spezielle Risiken sind gesplittete Verteilungsfunktionen notwendig. Gesplittete Verteilungen sind solche Verteilungen, bei denen bis zu einer bestimmten Schadenhöhe z.B. mittels einer Erlang-Verteilung modelliert wird, um dann ab einem bestimmten Exzesspunkt in eine Extremwertverteilung, wie z.B. in die Pareto-Verteilung überzugehen.

[4. Expertenschätzungen von Risikoabhängigkeiten

Die adäquate Aggregation von Risiken ist ein wesentlicher Baustein der analytischen Tätigkeit im Enterprise Risk Management (ERM). Nachdem man den Katalog der zu quantifizierenden Einzelrisiken festgelegt und die Risiken mittels Frequenz- und Schadenhöhenverteilungen modelliert hat, verbleibt die Frage der sachgerechten Aggregation dieser Risiken[4].

Die Aggregation der Risiken wird in der Praxis meist mittels Monte-Carlo-Simulation oder verwandter Verfahren wie beispielsweise Latin-Hypercube oder Sobol Simulationen bestimmt. Nachstehend werden wir vereinfachend immer von der Monte-Carlo-Simulation (MCS) sprechen.

Ziel der Aggregation ist es, für die jeweils betrachtete Aggregationsebene eine W-Verteilung des Gesamtrisikos auf dieser Ebene zu schätzen. Eine solche Ebene kann z.B. ein wohldefinierter separierbarer Teil der unternehmerischen Tätigkeit sein. Das jeweilige Gesamtrisiko setzt sich im Regelfall aus einem Katalog von Einzelrisiken (Risikoregister) zusammen, welche zumeist weder voneinander unabhängig sind, noch in deterministischer Weise zusammenhängen. Bevor eine MCS durchgeführt werden kann, ist der Zusammenhang zwischen den Risiken möglichst genau zu erfassen und quantitativ zu bemessen.

4.1 Kausalabhängigkeiten und Korrelationen

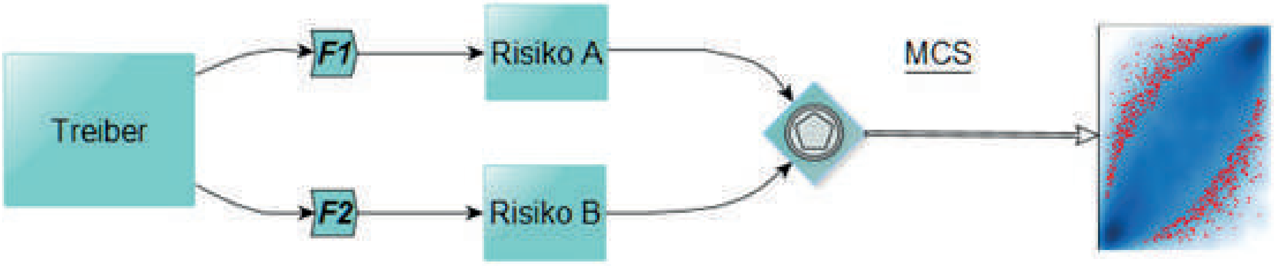
Gibt es einen klaren und identifizierbaren funktionalen Zusammenhang, so sollte dieser als solcher auch in der MCS berücksichtigt werden. Hierzu können z.B. auch sogenannte Treiber in das MCS Modell aufgenommen werden. Treiber sind stochastische Einflussfaktoren, welche in die Modellierung verschiedener Risiken mit einfließen. Die Treiber selbst sind dagegen keine Risiken im Sinne des MCS Modelles.

So kann etwa Inflation in der expliziten Form des BIP-Deflators ein Treiber sowohl für das Risiko steigender Rohstoffpreise als auch für das Risiko fallender Umsätze sein. Der Einfluss des BIP-Deflators auf diese beiden Risiken kann typischerweise über entsprechende Historien abgeschätzt werden. Im Allgemeinen hat ein Treiber keinen deterministischen, sondern lediglich einen stochastischen Einfluss auf das Risiko. So wird der BIP-Deflator mit den relevanten Rohstoffpreisen korrelieren, sie aber nicht vollständig bestimmen.

Am Beispiel zweier Risiken mit einem gemeinsamen Treiber lässt sich die Modellierung solcher treiberbasierten Risiken wie in Abbildung 2 schematisch darstellen. Neben dem mittels der Funktionen F1, F2 modellierten Einfluss des Treibers auf diese Risiken, können die Risiken natürlich weiteren Einflussfaktoren ausgesetzt sein.

Ist allerdings der Einfluss des Treibers hinreichend dominant, so wird man diesen im Allgemeinen gut mittels eines Scatterplots der simulierten Risiken erkennen können.

[4] Es wird angenommen, daß mit einer ausgearbeiteten Risikotaxonomie gearbeitet wird und die Granularität der Risikomodelle vorgegeben ist. In der Praxis kann es aber sinnvoll sein, die gewählte Risikotaxonomie auch vor dem Hintergrund der Simulationsergebnisse neu zu definieren.



Auf diese Weise können Expertenschätzungen gewisser Variablen der Funktionen F1, F2 die Risikoabhängigkeit modellieren, ohne dass dabei Korrelationen direkt geschätzt werden.

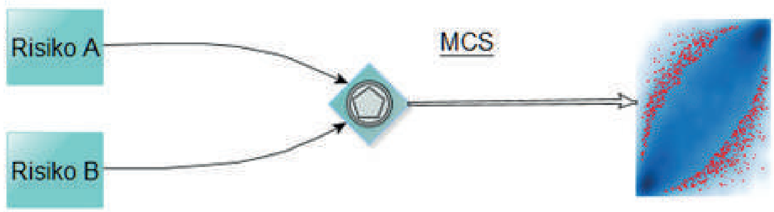
Eine solche (quasi-) kausale Modellierung ist im Allgemeinen einer Modellierung unter Verwendung von Korrelationen vorzuziehen. Dies gilt auch deshalb, weil selbst enge kausale Zusammenhänge nicht notwendig zu hohen Korrelationen führen müssen. So ergibt sich für die Fehleranfälligkeit komplexer technischer Anlagen (z.B. Kraftwerke) häufig ein U-förmiger Zusammenhang zum Alter der Anlage (auch bekannt als Badewannenkurve): Eine relativ hohe Anfälligkeit bei sehr jungen und bei älteren Anlagen sowie eine reduzierte Anfälligkeit für mittelalte Anlagen. Trotz eines klaren Zusammenhangs zwischen Alter und Fehleranfälligkeit kann der Korrelationskoeffizient (lineare Korrelation oder Rangkorrelation) wegen der U-Form des Zusammenhanges sehr klein sein.

Umgekehrt gilt natürlich, dass eine hohe Korrelation zwischen zwei Größen nicht notwendig auf einen direkten Kausalnexus hinweist. Dennoch erleben wir alle fast täglich (z.B. auch in der politischen Diskussion) den Fehlschluss von Korrelationen auf einen direkten Kausalzusammenhang zwischen den betrachteten Größen. Es gilt auch umgekehrt, dass nicht jeder Kausalzusammenhang zu einer hohen Korrelation der betrachteten Größen führt. Gleichwohl ist aber festzuhalten: Korrelationen sind ein Indiz dafür, dass die betrachteten Größen sich gegenseitig beeinflussen oder gemeinsam von anderen Größen beeinflusst werden. Der Wissenschaftstheoretiker Hans Reichenbach war der erste, der versuchte die Zusammenhänge zwischen Kausalität und Korrelation präzise zu formulieren[5]. Nach ihm ist das „Common Cause" Prinzip benannt, welches den Schluss von korrelierten Variablen auf gemeinsame Ursachen postuliert. Eine intensive Auseinandersetzung mit diesem Themenkomplex findet der theoretisch interessierte Leser insbesondere bei P. Suppes[6] und aus jüngerer Zeit auch bei J. Pearl und C. Hitchcock[7].

In Ermangelung vorliegender Analysen zu gemeinsamen Risikotreibern wird aber häufig ein rein statistischer Zusammenhang z.B. in Form einer Korrelationsannahme genutzt. In diesen Fällen wird die bivariate Verteilung also nicht erst durch die MCS approximiert, sondern wird stattdessen als Teil des MCS Modelles z.B. in Form einer mathematisch beschriebenen Copula[8] bestimmt. Diese Copula kann durch ein mathematisches Anpassungsverfahren aus historischen Daten gewonnen werden, oder aber als Expertenschätzung in das MCS Modell einfließen.

[5] Vgl. Arntzenius (2010); Reichenbach (1956)
[6] Suppes, P. (1970), A Probabilistic Theory of Causality, Amsterdam: North-Holland
[7] Pearl, J. (2009) Causality, Models, Reasoning and Inference, Second Edition, Cambridge University Press
Hitchcock, C. (2018), „Probabilistic Causation", The Stanford Encyclopedia of Philosophy
[8] Vgl. Beck, Lesko (2006), S. 289 – 293; R-package copula: http://copula.r-forge.r-project.org

Analoges gilt natürlich auch für den mehrdimensionalen Fall (mehr als nur 2 interdependierende Variablen). Hier werden die Standard Copulas unflexibler, aber die Verwendung von Vine Copulas kann hilfreich sein[9]. Für den bivariaten Fall lässt sich das Vorgehen schematisch wie folgt darstellen:



Hier wird also eine bivariate Verteilung, welche z.B. durch zwei Randverteilungen für die Einzelrisiken und eine bivariate Copula beschrieben wird als Eingabe für das MCS Modell genutzt.

Werden die Interdependenzen signifikant falsch eingeschätzt, so kann es zu groben Fehleinschätzungen der Gesamtrisikoverteilung kommen. Insbesondere können dadurch eklatante Fehlschätzungen der hohen Risikoquantile (z.B. > 95%) des aggregierten Risikos generiert werden. Dies kann den Wert der zuvor erarbeiten Einzelanalysen für das Gesamtrisikomanagement völlig zerstören zumindest aber stark einschränken.

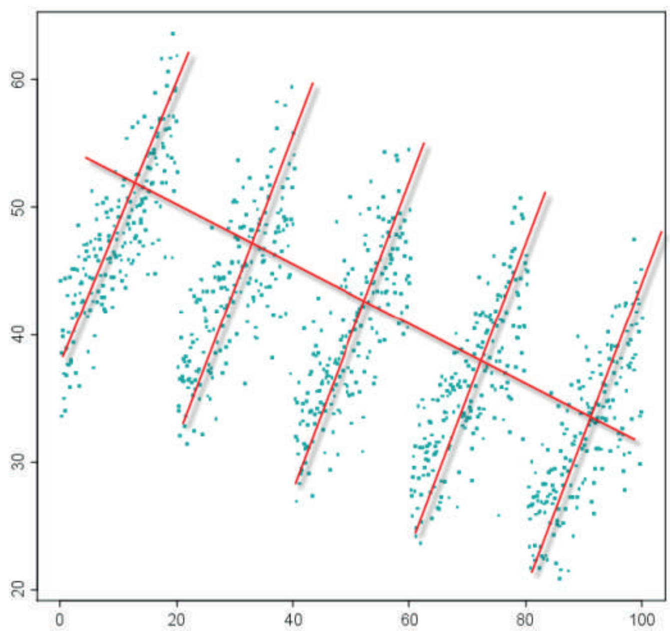
Schon bei der Quantifizierung der Einzelrisiken ist es eine Standardsituation, dass nicht genügend relevante historische Daten vorliegen, um W-Verteilungen zu fitten. Dies gilt im erhöhten Maße für Risikoabhängigkeiten bzw. multidimensionale W-Verteilungen.

Abhängigkeiten werden in vielen Risikomodellen nur wenig differenziert betrachtet. Zumeist werden lineare Korrelationen bzw. Rangkorrelationen geschätzt und dann in der MCS genutzt. Dies ist oft unzureichend und die Modellqualität kann durch Verwendung von Copulae oder auch Bayes'scher Netze (BN) verbessert werden.

Bereits zu einer validen Bestimmung eines Korrelationskoeffizienten braucht man allerdings umfangreiches relevantes Datenmaterial, um die Schätzungenauigkeit nicht zu groß werden zu lassen. Deshalb wird man meist Expertenschätzung vornehmen müssen.

4.2 Simpsons Paradoxon

Wir betrachten das Simpson Paradoxon anhand eines einfachen Datenbeispiels von 2 Variablen. Das Streudiagramm dieser Variablen möge wie folgt aussehen:



[9] Vgl. Allen, McAleer ,Singh (2017); R-Package Vine Copula: https://github.com/tnagler/VineCopula

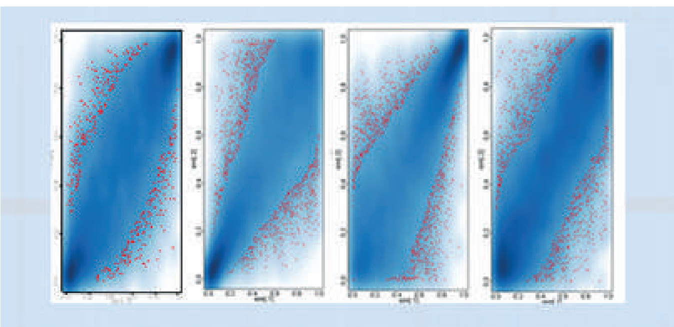
Die Daten lassen sich in offensichtlicher Weise in 5 Cluster unterteilen (die deutliche Clusterbildung ist dabei unwesentlich für das Simpson Paradox) . Jedes Cluster besitzt eine Korrelation von ca. + 0.8 während die gesamte Datenbestand eine Korrelation von – 0.56 aufweist. Hat der Experte bei seiner Schätzung immer nur Teilbereiche aber nicht den Gesamtzusammenhang vor Augen, so kann es also passieren, dass die Korrelation im gesamten Wertebereich insgesamt völlig falsch eingeschätzt wird. Solche Phänomene sind unter der Bezeichung „Simpson Paradoxon" bekannt geworden. Wie wollen den Leser mit der Nennung des Simpson Paradoxons dafür sensibilisieren, welche Fallstricke es bei der Modellierung von Korrelationen geben kann.

4.3 Expertenschätzung bivariater Copulae

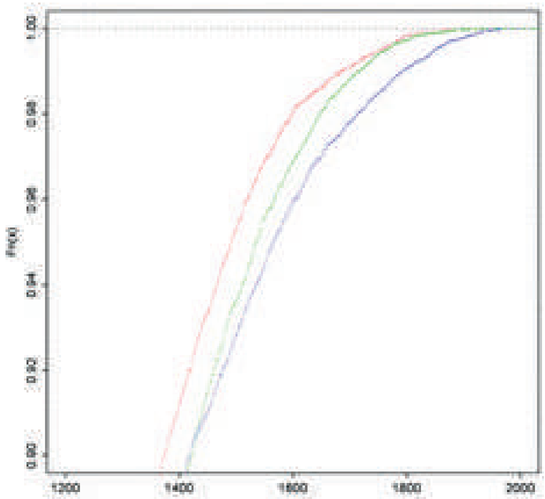
Für viele bivariate Copulae lässt sich eine Parametrisierung aus der Annahme eines Korrelationskoeffizienten bestimmen, d.h. die Copula wird durch zwei Angaben festgelegt:

- Typ der Copula
- Korrelationskoeffizient

Im Verhältnis zur bloßen Nutzung von Korrelationskoeffizienten lässt sich bereits so eine deutlich präzisere Modellierung von Zusammenhängen beschreiben. Die Abbildung zeigt simulierte Copula Datenpunkte im Einheitsquadrat für die Gauß-, Clayton-, Flipped Clayton- und Frank-Copula mit einer Spearman-Korrelation von jeweils 0.75.



Nimmt man nur für beide Risiken jeweils eine Dreieckverteilung mit einem Minimum von 100, einem Modus von 200 und ein Maximum von 1000, so erhält man folgendes Bild der (simulierten) kumulierten Verteilungen des aggregierten Risikos (oberhalb des 80% Quantils): Kurven von links nach rechts: Clayton, Frank, Gauß.



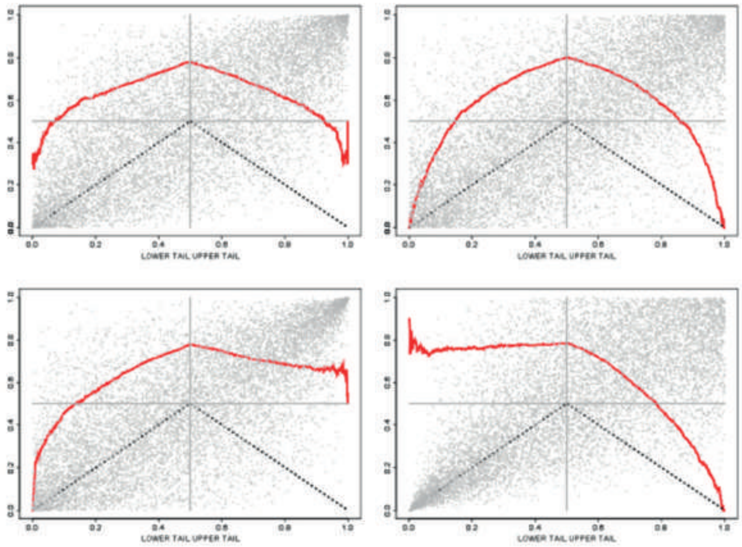
Es wird deutlich, welch großen Einfluss die Wahl der Copula bei gleicher Verteilung der Einzelrisiken trotz gleichem Korrelationskoeffizienten hat:

Wir erhalten deutlich unterschiedliche Verteilungen des aggregierten Risikos bei gleichen Verteilungen der Einzelrisiken und gleichen Korrelationskoeffizienten.

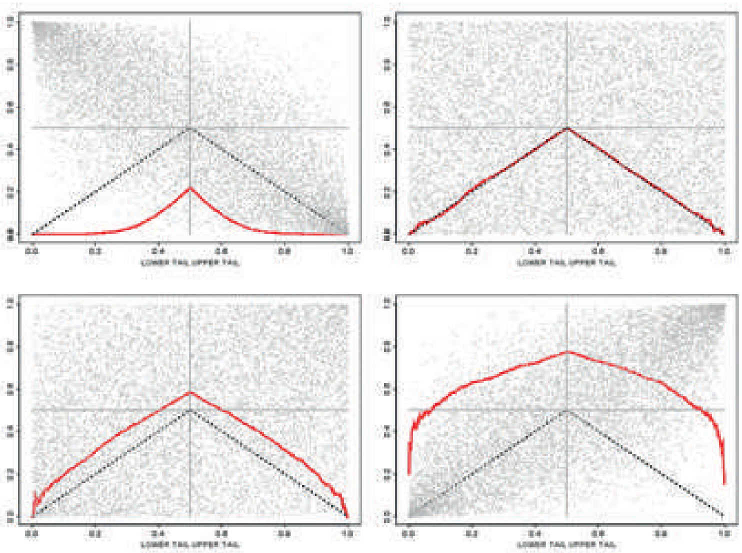
Bei der Wahl der Copula durch den Experten kann ein Blick auf die Scatterplots der verschiedenen Copulatypen helfen. Sehr viel deutlicher lässt sich allerdings der Einfluss einer Copula mit der sogenannten „Tail Concentration Function" darstellen: Im Einheitsquadrat [0,1]x[0,1] setzen wir für jedes t mit $0 <= t <= 0.5$:
$L(t)=p(U<z,V<z)$ = Wahrscheinlichkeit, dass die W-Verteilungen U und Z gleichzeitig kleiner als ihr z-Quantil sind. Entsprechend für jedes $0.5 < t <= 1$:

$L(t)=1-p(U>z,V>z)$ = Wahrscheinlichkeit, daß U und Z gleichzeitig größer als ihr z-Quantil sind.

Die Abbildungen zeigen simulierte Werte und die zugehörige Tail Concentration Function für verschiedene Copulae (von links oben nach unten rechts: Gauß, Frank, Gumbel und Clayton) jeweils mit einer Rang Korrelation von 0.75. Das gepunktete Dreieck entspricht einer Copula mit unabhängigen Variablen. Das unregelmäßige Ausfransen an den Enden ist auf die endliche Simulationsschrittzahl zurück zu führen.



Diese Abbildungen zeigen die simulierten Wertepaare einer Gauß Copula mit den unterschiedlichen Rangkorrelationen von -0.75, 0, 0.25 und 0.75. Bei negativer Korrelation verläuft die Kurve unterhalb des Dreiecks für den Fall unabhängiger Variablen, bei positver Korrelation darüber. Je weiter die Kurve sich von dem Dreieck entfernt, je höher ist die abschnittsweise Korrelation.



4.4 Höherdimensionale Abhängigkeiten

Möchte man auch höherdimensionale Abhängigkeiten durch Copulae beschreiben, ist man aus mathematischen Gründen sehr eingeschränkt. Unterstützen können sogenannte Vine –Copulae, welche die Flexibilität bivariater Copulae unter Verwendung von Bayes-Graphen in die Mehrdimensionalität hochziehen. Aus Platzgründen können wir an dieser Stelle nicht näher auf dieses Modellierungswerkzeug eingehen.

[5. Resümee

- Expertenschätzungen sind ein notwendiger und wichtiger Bestandteil von Risikoanalysen.
- Experten sollten zur Risikoschätzung die Begriffe Verfügbarkeitsheuristik, Basisrate, Ankereffekt, Rückschaufehler kennen.
- Für Schadenfrequenzen reicht eine kleine Gruppe von geeigneten Verteilungen. Deren Parametrisierung ist intuitiv gut fassbar.
- Für Schadenhöhen können die Dreieckverteilung, die Pertverteilung oder Verteilungen ähnlichen Typs, die über Min, Max und Modus parametrisierbar sind, in einer intuitiv nachvollziehbaren Weise genutzt werden.
- Werden Schadenhöhenverteilungen anderen Typs benötigt, so können diese über die Schätzung von Quantilen kalibriert werden.
- Die Schätzung von Korrelationen ist aufwändiger als die Schätzung von Einzelrisiken.
- Korrelationen sind keine Kausalbeziehungen, weisen aber auf gemeinsame Treiber hin.
- Auch enge Zusammenhänge zwischen Risiken müssen sich nicht in einem hohen positiven oder negativen Korrelationskoeffizienten zeigen.
- Gibt es gemeinsame Treiber von Risiken, so ist eine Modellierung der Treiber einer bloßen Schätzung der Korrelation im Allgemeinen vorzuziehen. Nichtlineare Interdependenzen sind als solche zu modellieren.
- Bei Modellierung bivariater Abhängigkeiten bieten Copulae deutlich mehr Gestaltungsspielraum als die bloße Verwendung von Korrelationskoeffizienten.
- Der Experte, der Risikoabhängigkeiten einschätzt, sollte das Simpson Paradox kennen.
- Abhängigkeiten zwischen Risiken lassen sich über vereinfachte Abschätzungen bedingter Wahrscheinlichkeiten darstellen und durch einen Bayes Baum darstellen.

[Literatur

- Reichenbach, H. (1956), The Direction of Time, Los Angeles: The University of California Press
- Kahneman, Daniel (2012): „Schnelles Denken, langsames Denken"
- Suppes, P. (1970), A Probabilistic Theory of Causality, Amsterdam: North-Holland
- Hitchcock, Christopher (2018), „Probabilistic Causation", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/causation-probabilistic/>
- Arntzenius, Frank, „Reichenbach's Common Cause Principle", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2010/entries/physics-Rpcc/>
- Beck, A. / Lesko, M.: Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 05/2006, Seiten 289 bis 293.
- Disch,O., Bayesche Statistik in der Risikoquantifizierung in „Digitale Risiken und Werte auf dem Prüfstand", Jahrbuch Risikomanagement 2019, Erich Schmidt Verlag, Berlin 2019
- Edwin Thompson Jaynes: Information Theory and Statistical Mechanics. In: The Physical Review. Band 106, Nr. 4, 15. Mai 1957, S. 620–630 (bayes.wustl.edu [PDF]).
- Goodman, N. (1955). Axiomatic measurement of simplicity. Journal of Philosophy, 52, 709-722.
- O'Hagan, Anthony, (2019/03/29), Expert Knowledge Elicitation: Subjective but Scientific
- The American Statistician
- Pearl, J. (2009) Causality, Models, Reasoning and Inference, Second Edition, Cambridge University Press

antares

[Software für sicher Entscheidungen

[Software für sichere Entscheidungen

antares Informations-Systeme GmbH
Stuttgarter Str. 99
D-73312 Geislingen

Tel. +49 7331 3076-0

www.antares-is.de
info@antares-is.de